ラグランジュ部分多様体と等径超曲面の幾何学 : 解説と展望 (部分多様体の微分幾何学的研究)

大仁田, 義裕

数理解析研究所講究録
第1775巻 2012年 1-24

ラグランジュ部分多様体と等径超曲面の幾何学（解説と展望）

大阪市立大学・大学院理学研究科　大仁田　義裕 (Yoshihiro Ohnita)
Department of Mathematics,
Graduate School of Science,
Osaka City University

序

この論説では，シンプレクティック幾何におけるラグランジュ部分多様体論とリーマン幾何学における等径超曲面論の間の関係に焦点を当てる．

シンプレクティック幾何学においてここ20年間K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, (FOOO [15], etc.)　によるラグランジュ部分多様体の交差のフレアーコホモロジー理論のような注目すべき大きな進歩をみている．シンプレクティック幾何学におけるそのような進歩によって鼓舞されて，最近，複素ユークリッド空間，複素射影空間，複素空間形，エルミート対称空間，一般化された旗多様体，トーリック多様体などのような特化したケーラー多様体のラグランジュ部分多様体の研究において，微分幾何学者らにより一層の発展がいくつものなされている．

部分多様体理論は，リーマン幾何学において最も長い歴史の学問領域であり，ラグランジュ部分多様体のそのような研究に対する種々の技巧や多くの例を提供し得る．**等径超曲面**は，部分多様体論における最も基本的で魅力的な研究対象の一つである．リーマン多様体 M の**等径超曲面**(isoparametric hypersurface) は，偏微分方程式

$$\begin{cases} \bar{\Delta} f = S(f), \\ \|\bar{\nabla} f\|^2 = T(f). \end{cases} \tag{0.1}$$

を満たす M 上の C^∞-関数 f の正則値に対する等位超曲面として定義される．

そのような関数 f は，等径関数 (*isoparametric function*) と呼ばれる．It is well-known that an isoparametric hypersurface of 実空間 M（定断面曲率のリーマン多様体）の等径超曲面は，主曲率一定の超曲面に他ならない．今日，等径超曲面論は，良い可微分多様体の大変興味深い1つのクラスとして，よく発達した研究領域である．G. Thorbergsson [56] や T. E. Cecil [7] は，等径超曲面に関する優れたサーベイ論文である．

この論説では，最初に，一般のシンプレクティック多様体やケーラー多様体におけるラグランジュ部分多様体に関するいくつかの基礎的な概念，不変量および結果を呼び出す．次に，我々は標準球面における等径超曲面の理論を概観し，我々の研究に適用されるいくつかの大切な結果を準備する．

今，我々は等径超曲面に関わるラグランジュ部分多様体の構成に注意すべきである．とくに，標準球面内の等径超曲面から得られる複素2次超曲面内のラグランジュ部分多様体に注目しよう．

n 次元複素2次超曲面 $Q_n(\mathbf{C})$ とは，同次2次代数方程式 $(z_0)^2+(z_1)^2+\cdots+(z_{n+1})^2=0$ によって定義された複素射影空間 $\mathbf{C}P^{n+1}$ の滑らかなコンパクト複素代数超曲面である．これは，$n+2$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+2}$ の向き付けられた2次元ベクトル部分空間全体のなす実グラスマン多様体 $\tilde{G}r_2(\mathbf{R}^{n+2})$ と標準的に等長同型で

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 53C40; Secondary: 53D12, 53C42.
Partially supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (S) No. 23224002.

ある．それは，等質空間表示 $Q_n(\mathbf{C}) \cong \tilde{G}r_2(\mathbf{R}^{n+2}) \cong SO(n+2)/(SO(2) \times SO(n))$ をもち，正のアインシュタイン定数の標準的アインシュタイン-ケーラー計量が付与されたコンパクト階数 2 エルミート対称空間である．$Q_1(\mathbf{C}) \cong S^2$, $Q_2(\mathbf{C}) \cong S^2 \times S^2$ で，もし $n \geq 3$ ならば，$Q_n(\mathbf{C})$ は既約である．複素 2 次超曲面 $Q_n(\mathbf{C})$ は，標準球面 $S^n(1)$ の接ベクトル束の一つのコンパクト化とみなせることには注意する．

単位標準球面の向き付けられた超曲面の**ガウス写像**は，は，複素 2 次超曲面にはめ込まれたラグランジュ部分多様体を与える (参照 Subsection 4.2)．球面内の等径超曲面の**ガウス像**（ガウス写像の像）は，Hui Ha 副教授（北京，清華大学）との私の最近の共同研究の主な研究対象である．我々は，単位標準球面 $S^{n+1}(1)$ 内に埋め込まれた g 個の相異なる一定の主曲率をもつコンパクトな向き付けられた等径超曲面 N^n のガウス像は，複素 2 次超曲面に埋め込まれたコンパクト極小ラグランジュ部分多様体で，N^n によって被覆変換群 $\mathbf{Z}_g$ をもって被覆される，ことが得られる (参照 Theorem 4.1)．さらに，ガウス像 $\mathcal{G}(N^n)$ は，コンパクト，単調で巡回的なラグランジュ部分多様体で，極小マスロフ数が自然数 $2n/g$ に等しい（参照 Theorem 4.3），さらに，$2n/g$ が偶数 (resp. 奇数) であることと $\mathcal{G}(N^n)$ が向き付け可能 (resp. 向き付け不可能)，であるとは同値である (参照 Theorem 4.2)．そのあと，関連の話題や未解決問題について言及する．

この論説は次のように構成される：第 1 節において，シンプレクティック多様体のラグランジュ部分多様体のハミルトン変形，ハミルトン群作用の運動量写像とラグランジュ軌道，マスロフ指数と極小マスロフ指数，ラグランジュ部分多様体の単調性や巡回性，などの概念および初等的結果を復習する．第 2 節において，ケーラー多様体，とくにアインシュタイン-ケーラー多様体，のラグランジュ部分多様体を扱う．平均曲率形式，ハミルトン極小性，ハミルトン安定性，マスロフ指数に対する積分公式を記述する．第 3 節において，標準球面の等径超曲面に関する基本的構造および既知の結果の要点を述べる．第 4 節において，標準球面の等径超曲面のガウス像として得られるコンパクトなラグランジュ部分多様体の基礎的な構造および性質を議論する．第 5 節において，標準球面の等径超曲面からの標準球面の接ベクトル束における特殊ラグランジュ部分多様体の構成の問題について言及する．

この論説は，RIMS 研究集会「部分多様体の微分幾何学的研究」(2011 年 6 月 27 日-29 日）における著者の講演に基づき，[43] の内容に修正，改訂を加え解説したものである．著者は，この研究集会に講演の機会を与えてくださったこととこの RIMS 研究集会の優れた組織に対して岡山大学・藤森祥一准教授には感謝の意を表わします．

1. シンプレクティック多様体のラグランジュ部分多様体とそのハミルトン変形

1.1. **ラグランジュ部分多様体とハミルトン変形.** (M^{2n}, ω) をシンプレクティック形式 ω をもつ $2n$ 次元シンプレクティック多様体とする．定義によって，**ラグランジュはめ込み**（Lagrangian immersion）とは，条件 $\varphi^*\omega = 0$ を満たす（極大）n 次元 C^∞-多様体から M への C^∞-はめ込み $\varphi : L \longrightarrow M^{2n}$ のことである．条件 $\varphi^*\omega = 0$ のみを満たす部分多様体は，**等方的な部分多様体**（*isotropic submanifold*）と呼ばれる．もし $\varphi : L \longrightarrow M^{2n}$ がラグランジュはめ込みならば，ω の非退化性によって，自然な線型束準同型

$$\varphi^{-1}TM/\varphi_*TL \ni v \mapsto \alpha_v := \omega(v, \varphi_*(\cdot)) \in T^*L$$

は，線型束同型になり，C^∞-断面のベクトル空間の間の線型同型

$$C^\infty(\varphi^{-1}TM/\varphi_*TL) \to \Omega^1(L)$$

が誘導される．

次に，ラグランジュはめ込みの「変形」を考えよう．$\varphi_t : L \longrightarrow (M^{2n}, \omega)$ を $\varphi_0 = \varphi$ なる C^∞-はめ込みの 1-パラメータ C^∞-族とする． $V_t := \dfrac{\partial \varphi_t}{\partial t} \in C^\infty(\varphi_t^{-1}TM)$ とおく．このとき，

定義 1.1.

$\{\varphi_t\}$: **ラグランジュ変形**（*Lagrangian deformation*）

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ φ_t が各 t に対してラグランジュはめ込みである

$\Longleftrightarrow$ $\alpha_{V_t} \in Z^1(L)$ は各 t に対して閉 1 次微分形式.

$\{\varphi_t\}$: **ハミルトン変形**（*Hamiltonian deformation*）

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha_{V_t} \in B^1(L)$ は各 t に対して完全 1 次微分形式.

ハミルトン変形は，ラングランジュ変形である．ラングランジュ変形とハミルトン変形の間の差は，$H^1(L;\mathbf{R}) \cong Z^1(L)/B^1(L)$ である． とくに，$b_1(L) = 0$ ならば，L の任意のラングランジュ変形はハミルトン変形である．

次のように，アイソモノドロミー変形によるハミルトン変形の特徴付けがある: $\dfrac{1}{2\pi}[\omega] \in H^2(M, \mathbf{R})$ は，integral class と仮定する（そのようなシンプレクティック多様体は，前量子化可能（prequantizable）と呼ばれる．参照 小節 1.3）．このとき，M 上の複素直線束 $\mathcal{L}$ とその曲率形式が $\sqrt{-1}\omega$ となるような $\mathcal{L}$ における $U(1)$-接続 ∇ が存在する． $\varphi_t : L \longrightarrow M$ をラングランジュ変形とする．各 t に対する φ_t による L 上の引き戻しの複素直線束 $\varphi_t^{-1}\mathcal{L}$ の引き戻しの $U(1)$-接続 $\varphi_t^{-1}\nabla$ は，L 上の平坦 $U(1)$-接続 $\{\varphi_t^{-1}\nabla\}$ の族を与える．このとき，

補題 1.1 (参照 [26], [42])**.** $\{\varphi_t\}$ がハミルトン変形であるための必要十分条件は，平坦接続の族 $\{\varphi_t^{-1}\nabla\}$ が同じホロノミー準同型 $\rho_t : \pi_1(L) \longrightarrow U(1)$ をもつことである．

1.2. **ラグランジュ軌道と運動量写像.**

命題 1.1. 運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ をもつシンプレクティック多様体 (M, ω) の上への連結リー群 G のハミルトン群作用のすべてのラグランジュ軌道は，ある $\alpha \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*)$ に対する等位部分集合 $\mu^{-1}(\alpha)$ の成分として現れる．ここで，$\mathfrak{g}^*$ は， G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の双対ベクトル空間を表わし，

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*) := \{\alpha \in \mathfrak{g}^* \mid \text{すべての } a \in G \text{ に対して } \mathrm{Ad}^*(a)\alpha = \alpha\}$$

と定める．もし M と G がコンパクトならば， 各ラグランジュ軌道は，ある $\alpha \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*) \cong \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ に対して，等位部分集合 $\mu^{-1}(\alpha)$ と一致する．ここで，$\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の中心を表わす．

1.3. **単調で巡回的なラグランジュ部分多様体のマスロフ指数.** この小節では，シンプレクティック多様体のラグランジュ部分多様体のいくつかの基本的な概念と不変量について思い出そう (参照. [36], [38], [47], [48]). ラグランジュ交差のフレアーコホモロジー理論は，[36], [37], [39]，さらなる大きな発展についてはFOOO ([15])，において研究された．小節 2.2 において，アインシュタイン - ケーラー多様体におけるラグランジュ部分多様体に対するそれらの不変量に関するいくつかの有用な結果について言及する．

(M, ω) をシンプレクティック多様体，L を M のラグランジュ部分多様体とする．$w : (D^2, \partial D^2) \to (M, L)$ を対の間の滑らかな写像とする．ここで，D^2 は $\mathbf{R}^2$ の単位開円板，∂D^2 は D^2 の境界としての単位円とする．同一視 $w^{-1}(TM) \cong D^2 \times \mathbf{R}^{2n}$ をとる．

$$\mathrm{Lagr}(\mathbf{R}^{2n}) := \{\mathbf{R}^{2n} \text{ のラグランジュベクトル部分空間 }\} = O(2n)/U(n)$$

とおく．
$$\tilde{w} : \partial D^2 \ni p \longmapsto T_{w(p)}L \in \mathrm{Lagr}(\mathbf{R}^{2n}) \tag{1.1}$$
によって $\mathrm{Lagr}(\mathbf{R}^{2n})$ の一つループ $\tilde{w}$ を定める．

マスロフ類 $\mu \in H^1(O(2n)/U(n);\mathbf{R})$ を使って，L の**マスロフ指数** は，
$$I_{\mu,L}([w]) := \mu(\tilde{w}) \in \mathbf{Z}. \tag{1.2}$$
によって定義された群準同型写像 $I_{\mu,L} : \pi_2(M,L) \to \mathbf{Z}$ である．$I_{\mu,L}$ は，ラグランジュ変形のもとで不変である．L の**最小マスロフ数** Σ_L は，
$$\Sigma_L := \min\{I_{\mu,L}(A) \mid A \in \pi_2(M,L), I_{\mu,L}(A) > 0\} \tag{1.3}$$
によって定義される．

もう 1 つの準同型写像 $I_\omega : \pi_2(M,L) \to \mathbf{R}$ が，対の間の任意の滑らかな写像 $w : (D^2, \partial D^2) \to (M,L)$ に対して，
$$I_\omega([w]) := \int_{D^2} w^*\omega \in \mathbf{R}. \tag{1.4}$$
によって定義される．I_ω は，ハミルトン変形のもとで不変だが，ラグランジュ変形では不変でない．

シンプレクティック多様体 (M,ω) のラグランジュ部分多様体 L は，ある正の定数 $\lambda > 0$ が存在して，
$$I_{\mu,L} = \lambda I_\omega. \tag{1.5}$$
が成り立つとき，**単調**（*monotone*）であると言う．

(M,ω) をシンプレクティック多様体とする．(M,ω) の**周期群**（*period group*）は，
$$\Gamma_\omega := \{[\omega](A) \mid A \in H_2(M;\mathbf{Z})\} \subset \mathbf{R} \tag{1.6}$$
によって定義された加法群である．もし M が単連結ならば，
$$\Gamma_\omega = \{[\omega](u) \mid u : S^2 \longrightarrow M \text{ なめらか }\} \subset \mathbf{R}. \tag{1.7}$$
が成り立つ．

シンプレクティック多様体 (M,ω) が次の条件を満たすとき，**前量子化可能**（*pre-quantizable*）と呼ばれる：Γ_ω が $\mathbf{R}$ において離散的，あるいは同値に，ある零でない定数 γ が存在して，$\left[\dfrac{\omega}{\gamma}\right]$ は integral class, 即ち，$\left[\dfrac{\omega}{\gamma}\right] \in i(H^2(M;\mathbf{Z}))$ である．ここで，i は，包含関係 $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ によって誘導された自然な準同型写像 $i : H^2(M;\mathbf{Z}) \to H^2(M;\mathbf{R})$ を表わす．$\left[\dfrac{\omega}{\gamma}\right]$ が integral class であることは，曲率形式が $2\pi\sqrt{-1}\,\dfrac{\omega}{\gamma}$ である $U(1)$-接続 ∇ をもつ M 上の複素直線束が存在することと同値である．M が前量子化可能ならば，
$$\Gamma_\omega = \gamma_\omega \mathbf{Z}. \tag{1.8}$$
となるような非負実数 $\gamma = \gamma_\omega$ を選ぶことができる．

シンプレクティック多様体 (M,ω) は前量子化可能と仮定する．M のラグランジュ部分多様体 L は，もし
$$\Gamma_{\omega,L} := \{[\omega](B) \mid B \in H_2(M,L;\mathbf{Z})\} \subset \mathbf{R} \tag{1.9}$$
が離散的ならば，**巡回的** *(cyclic)* であると呼ばれる．もし L が巡回的ならば，非負実数 $\gamma_{\omega,L}$ を，
$$\Gamma_{\omega,L} = \gamma_{\omega,L}\,\mathbf{Z}. \tag{1.10}$$
となるように選ぶことができ，整数 k があって，
$$\gamma_\omega = k\,\gamma_{\omega,L}. \tag{1.11}$$

となり，さらに，$\otimes^k(i^{-1}E, i^{-1}\nabla)$ が自明になるような正の整数 k が存在する．

M は単連結であると仮定する．このとき，L が巡回的であるための必要十分条件は，ある整数 k が存在して，$\otimes^k(i^{-1}E, i^{-1}\nabla)$ が自明なることである．

$$n_L := \min\{k \in \mathbf{Z} \mid k \geq 1, \otimes^k(i^{-1}E, i^{-1}\nabla) \text{ は自明 }\} = \frac{\gamma_\omega}{\gamma_{\omega,L}} \in \mathbf{Z}. \tag{1.12}$$

と定める．

2. ケーラー多様体のラグランジュ部分多様体

2.1. ハミルトン極小およびハミルトン安定性. (M, ω, J, g) を，ケーラー形式 ω 複素構造 J，ケーラー計量 g をもつケーラー多様体とする．$\varphi : L \longrightarrow M$ をラグランジュはめ込みとする．B で (M, g) における部分多様体 L の第 2 基本形式を表わす．

定義 2.1.

$$\begin{array}{ll} H: & \varphi \text{ の平均曲率ベクトル場} \\ \updownarrow & \\ \alpha_H: & \varphi \text{ の}\textbf{平均曲率形式} \end{array}$$

ケーラー多様体へのラグランジュはめ込みの平均曲率形式は，常に恒等式

$$d\alpha_H = \varphi^* \rho_M \tag{2.1}$$

を満たすことが知られている ([12])．ここで，ρ_M は $\rho_M(X, Y) = \mathrm{Ric}^M(JX, Y)$ によって定義された M のリッチ形式を表わす．Ric^M は (M, ω, J, g) のリッチテンソル場を表わす．従って，もし M がアインシュタイン-ケーラーならば，平均曲率形式 α_H は閉 1 次微分形式である．

ハミルトン極小およびハミルトン安定の概念が Y. G. Oh (1990) によって最初に導入され研究された ([33])

単純のために，この論説を通じて我々は，L はコンパクトで境界のない多様体と仮定する．

定義 2.2.

φ: **ハミルトン極小**（*Hamiltonian minimal or H-minimal*）

$$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \varphi_0 = \varphi \text{ なる任意のハミルトン変形 } \varphi_t : L \longrightarrow M \text{ に対して，}$$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}\,(L, \varphi_t^* g)|_{t=0} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \delta\alpha_H = 0.$$

$\alpha_H = 0$（即ち，$H = 0$）のときは，もちろんハミルトン極小であるが，L は通常の意味の**極小部分多様体**（*minimal submanifold*）であり，L を**極小ラグランジュ部分多様体**（*minimal Lagrangian submanifold*）と呼ぶ．

さらに，φ はハミルトン極小であると仮定する．このとき，$\varphi_0 = \varphi$ なる各ハミルトン変形 $\{\varphi_t\}$ に対して，

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Vol}\,(L, \varphi_t^* g)|_{t=0} \geq 0.$$

φ は**ハミルトン安定**（*Hamiltonian stable*） と呼ばれる．

補題 2.1 (第 2 変分公式のハミルトン版（[35]）).

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Vol}\,(L,\varphi_t^* g)|_{t=0}$$
$$=\int_L \left(\langle \Delta_L^1 \alpha,\alpha\rangle - \langle \overline{R}(\alpha),\alpha\rangle - 2\langle \alpha\otimes\alpha\otimes\alpha_H, S\rangle + \langle \alpha_H,\alpha\rangle^2\right) dv$$

ここで， Δ_L^1 は L 上の滑らかな 1 次微分形式全体のなすベクトル空間 $\Omega^1(L)$ に作用する $(L,\varphi^* g)$ のラプラス作用素を表わす.

- $\alpha := \alpha_V \in B^1(L)$．ここで，$V = \left.\dfrac{\partial \varphi_t}{\partial t}\right|_{t=0} \in C^\infty(\varphi^{-1}TM)$.
- $\langle \overline{R}(\alpha),\alpha\rangle := \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{Ric}^M(e_i,e_j)\alpha(e_i)\alpha(e_j)$．ここで，$\{e_i\}$ は T_pL の正規直交基底である.
- $S(X,Y,Z) := \omega(B(X,Y),Z)$ は，L 上の 3 次の対称テンソル場である.

今，X は M 上の正則キリングベクトル場（即ち，そのフローが計量と複素構造を保存するベクトル場）であるとする．このとき， M 上の対応する 1 次微分形式 $\alpha_X := \omega(X,\cdot)$ は常に閉形式である，もし $H^1(M,\mathbf{R}) = \{0\}$ ならば，$\alpha_X = \omega(X,\cdot)$ は完全形式，即ち　X は M 上のハミルトンベクトル場である． 従って，M が単連結, より一般に，$H^1(M,\mathbf{R}) = \{0\}$, ならば，$M$ 上の各正則キリングベクトル場は，φ の体積を保つハミルトン変形を生成する.

定義 2.3. このような全空間 M の正則キリングベクトル場から誘導される φ のハミルトン変形は，**自明**（*trivial*）であるという.

定義 2.4. φ はハミルトン極小であると仮定する．このとき，φ は，次の 2 条件を満たすとき，**強ハミルトン安定**（*strictly Hamiltonian stable*）であると呼ばれる：

(i) φ はハミルトン安定である.

(ii) ハミルトン変形上の第 2 変分の零（退化）部分空間が，φ の自明なハミルトン変形によって誘導される無限小変形からなるベクトル空間と一致する.

もし L が強ハミルトン安定ならば, L は任意のハミルトン変形に沿って体積極小である，ことに注意する.

定義 2.5. ケーラー多様体 (M,ω,J,g) に埋め込まれたラグランジュ部分多様体は，ケーラー構造の自己同型群 $\mathrm{Aut}(M,\omega,J,g)$ の解析的部分群（連結リー部分群）のラグランジュ軌道として得られるとき，M の**等質ラグランジュ部分多様体**（*homogeneous Lagrangian submanifold*）と呼ばれる.

命題 2.1. ケーラー多様体の任意のコンパクトな等質ラグランジュ部分多様体は，ハミルトン極小である.

証明. α_H はリーマン等質空間 L 上の不変 1 次微分形式であるから，$\delta\alpha_H$ は L 上の定数関数である．L はコンパクトであるから，発散定理によって $\delta\alpha_H = 0$ が得られる. □

定理 2.1 ([57], [40]). $M = \tilde{M}(c)$ を複素空間形，即ち 正則断面曲率一定 c のケーラー多様体，とし，L を M にはめ込まれたコンパクトなラグランジュ部分多様体とする. もし L がハミルトン極小で非負断面曲率をもつならば，L は平行な第 2 基本形式もつ, 即ち $\nabla S = 0$. 逆もまた成立する.

1 より大きい階数のエルミート対称空間内のコンパクトなラグランジュ部分多様体に対しては，この主張は一般に成立しない (注意 6 を見よ).

特定のケーラー多様体のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体の分類は，リーマン-シンプレクティック幾何学の意味において興味深く重要な問題である.

問題. 複素射影空間，複素ユークリッド空間, 複素双曲空間，エルミート対称空間，不変ケーラー構造をもつ一般化された旗多様体，トーリック多様体などのような特定なケーラー多様体のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体を分類せよ.

2.2. アインシュタイン-ケーラー多様体の巡回的なラグランジュ部分多様体の極小マスロフ数.

定理 2.2 ([38]). L をアインシュタイン-ケーラー多様体 (M, ω, J, g) のラグランジュ部分多様体 L とする. このとき，$H^1(L; \mathbf{R})$ における L の平均曲率形式の実コホモロジー類 $[\alpha_H]$ は，L のあらゆるハミルトン変形のもとで（大域的に）不変である.

小野肇は， ケーラー多様体のラグランジュ部分多様体のマスロフ指数 $I_{\mu,L}$ の次の積分公式を示した. その公式は，Y. G. Oh ([38]) のいくつもの結果を改良することを可能ならしめる.

定理 2.3 ([47]). ケーラー多様体 (M, ω, J, g) のラグランジュ部分多様体とする. 対の間の任意の滑らかな写像 $w : (D^2, \partial D^2) \to (M, L)$ に対して，

$$I_{\mu,L}([w]) = \frac{1}{\pi}\int_{D^2} w^* \rho_M + \frac{1}{\pi}\int_{\partial D^2} (w|_{\partial D^2})^* \alpha_H. \tag{2.2}$$

が成立する.

次の 2 つの定理は，彼の積分公式の応用である.

定理 2.4 ([47]). (M, ω, J, g) は，正のアインシュタイン定数をもつ単連結なアインシュタイン-ケーラー多様体と仮定する. このとき，M のコンパクトなラグランジュ部分多様体 L が，単調であることと $H^1(L; \mathbf{R})$ において $[\alpha_H] = 0$ であることは同値である.

系 2.1. 正のアインシュタイン定数をもつ単連結なアインシュタイン-ケーラー多様体 M のコンパクトで単調なハミルトン極小ラグランジュ部分多様体 L は，極小である.

系 2.2. 正のアインシュタイン定数をもつ単連結なアインシュタイン-ケーラー多様体 M のコンパクトな極小ラグランジュ部分多様体 L は，単調である.

今，

$$\gamma_{c_1} := \min\{c_1(M)(A) \mid A \in H_2(M; \mathbf{Z}), c_1(M)(A) > 0\} \in \mathbf{Z},$$
$$\gamma_{c_1,L} := \min\{c_1(M)(B) \mid B \in H_2(M, L; \mathbf{Z}), c_1(M)(B) > 0\} \in \mathbf{Z}.$$

と定める. 次の公式 (2.3) は，定理 4.3 の証明において本質的に利用される.

定理 2.5 ([47]). (M, ω, J, g) は，正のアインシュタイン定数をもつ単連結なアインシュタイン-ケーラー多様体と仮定する. もし L がコンパクトで単調なラグランジュ部分多様体ならば，L は巡回的で，公式

$$n_L \, \Sigma_L \; = \; 2\, \gamma_{c_1}. \tag{2.3}$$

が成り立つ.

注意. コンパクト型エルミート対称空間 M に対する γ_{c_1} は次のように与えられる ([5, p.521]): $M = SU(p+q)/S(U(p)\times U(q))$ ならば, $\gamma_{c_1} = p+q$. $M = SO(2p)/U(p)$ ならば, $\gamma_{c_1} = 2p-2$. $M = Sp(p)/U(p)$ ならば, $\gamma_{c_1} = p+1$. $M = SO(p+2)/(SO(2)\times SO(p))\,(p\geq 2)$ ならば, $\gamma_{c_1} = p$. $M = E_6/(T^1\cdot Spin(10))$ ならば, $\gamma_{c_1} = 12$. $M = E_7/(T^1\cdot E_6)$ ならば, $\gamma_{c_1} = 18$.

2.3. **アインシュタイン-ケーラー多様体の極小ラグランジュ部分多様体の第 1 固有値**. アインシュタイン-ケーラー多様体 (M,ω,J,g) のコンパクト極小ラグランジュ部分多様体 L の場合は, 第 2 変分公式のハミルトン版 2.1 から, ハミルトン安定性の条件は次のように単純化される:

系 2.3 (B. Y. Chen - T. Nagano - P. F. Leung [9], Y. G. Oh [33]). M をアインシュタイン定数 κ をもつアインシュタイン-ケーラー多様体, L を M にはめ込まれたコンパクトな極小ラグランジュ部分多様体とする. このとき, L がハミルトン安定であるための必要十分条件は, $\lambda_1\geq\kappa$ である. ここで, λ_1 は, $\Omega^0(L)=C^\infty(L)$ に作用するラプラス作用素の (正の) 第 1 固有値を表わす.

一方, 次のように, 極小ラグランジュ部分多様体の第 1 固有値に対する上からの評価が知られている.

定理 2.6 ([45], [46], [3]). M をアインシュタイン定数 $\kappa>0$ をもつコンパクト等質アインシュタイン-ケーラー多様体と仮定する. L を M にはめ込まれたコンパクトな極小ラグランジュ部分多様体とする. このとき, $\lambda_1\leq\kappa$ が成り立つ.

問題. アインシュタイン定数 $\kappa>0$ をもつコンパクト等質アインシュタイン-ケーラー多様体において, どんなコンパクト極小ラグランジュ部分多様体が不等式 $\lambda_1\leq\kappa$ の等号を達成するか? 「$\lambda_1=\kappa \iff L$ はハミルトン安定」なる意味がある.

複素ユークリッド空間, 複素射影空間, 複素空間形内のハミルトン安定なラグランジュ部分多様体やコンパクトエルミート対称空間の全測地的ラグランジュ部分多様体のハミルトン安定性など既知の例, 結果, 問題については, 例えば, 最近のサーベイ [44] を参照.

3. 標準球面内の等径超曲面

3.1. **構造理論.** この小節では, Elie Cartan, そして H. F. Münzner, による単位標準球面内の等径超曲面の基本構造を手短に説明しよう. ([31], [32], 参照 G. Thorbergsson [56], T. E. Cecil [7]).

N^n を単位標準球面内 $S^{n+1}(1)$ に埋め込まれた g 個の一定の主曲率 $k_1>k_2>\cdots>k_g$ をもつ連結な向き付けられた超曲面とする. 各主曲率に対応する重複度を $m_\alpha\,(\alpha=1,\cdots,g)$ で表わす.

$\mathbf{x}(p)$ で N の点 p の原点 O からの位置ベクトルを表わし, $\mathbf{n}(p)$ で N の点 p での $S^{n+1}(1)$ における単位法ベクトルを表わす. $\mathbf{x}$ は, N^n の点の位置ベクトル, $\mathbf{n}$ は N^n の向きと適合した $S^{n+1}(1)$ における単位法ベクトル場である.

定理 3.1 ([31]). $k_\alpha=\cot\theta_\alpha\,(\alpha=1,\cdots,g)$ とおく. ここで, $0<\theta_1<\cdots<\theta_g<\pi$. このとき, 次の性質が成り立つ:

$$\theta_\alpha=\theta_1+(\alpha-1)\frac{\pi}{g}\quad(\alpha=1,\cdots,g), \tag{3.1}$$

$$m_\alpha=m_{\alpha+2}\quad \text{添え字は } g \text{ を法とする}, \tag{3.2}$$

$$n=\begin{cases}\dfrac{(m_1+m_2)\,g}{2} & (g\geq 2),\\ m_1 & (g=1).\end{cases} \tag{3.3}$$

このようにして，gが奇数ならば, $m_1 = m_2 = \cdots = m_g$. $\theta_1 + (\alpha - 1)\dfrac{\pi}{g} < \pi = \dfrac{g\pi}{g}$ だから, $0 < \theta_1 < \dfrac{(g-\alpha+1)\pi}{g}$ が成り立ち， とくに，$0 < \theta_1 < \dfrac{\pi}{g}$.

各 $q \in A$ に対して

$$V(q) := \cos(g\, t(q))$$

によって，N^n の管状近傍 A における滑らかな関数 V を定義する．ここで，$\theta_1 - t(q)$ は $S^{n+1}(1)$ における点 q から N^n への距離に等しい．各 $r > 0$ および各 $q \in A$ に対して，

$$\bar{F}(rq) := r^g \cos(g\, t(q)) = r^g\, V(q)$$

と定める．

開錐 $\bigcup_{r>0} rA \subset \mathbf{R}^{n+2}$ の上の関数 $\bar{F}$ は，g 次同次多項式 $F : \mathbf{R}^{n+2} \to \mathbf{R}$，に拡張する．$g$ 次同次多項式 F は，*Cartan-Münzner* **多項式**, と呼ばれ，微分方程式:

$$\begin{cases} \Delta F = c\, r^{g-2}, \\ \|\mathrm{grad} F\|^2 = g^2 r^{2g-2}, \end{cases} \tag{3.4}$$

を満たす．ここで，$c := g^2 \dfrac{m_2 - m_1}{2}$，$r = \|\mathbf{x}\|^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + \cdots + (x_{n+2})^2$ である．さらに，$V = F|_{S^{n+1}(1)}$ は，$S^{n+1}(1)$ における等径関数方程式:

$$\begin{cases} \bar{\Delta} V \;=\; -g(g+n)\, V + c \;=\; S(V), \\ \|\bar{\nabla} V\|^2 \;=\; g^2(1 - V^2) \;=\; T(V), \end{cases} \tag{3.5}$$

を満たす．ここで，$\bar{\nabla}$ および $\bar{\Delta}$ は，それぞれ $S^{n+1}(1)$ のレビ・チビタ接続およびラプラス・ベルトラミ作用素を表わす．とくに，$V = F|_{S^{n+1}(1)}$ は，$S^{n+1}(1)$ の**等径関数**と呼ばれる． $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{g}$ なので, $\cos(g\theta_1) \neq \pm 1$ が成り立ち，よって $\cos(g\theta_1)$ は $S^{n+1}(1)$ 上の関数 V の正則値である. 等位超曲面 $V^{-1}(\cos(g\theta_1))$ は，$S^{n+1}(1)$ に埋め込まれたコンパクト**連結**向き付け可能で**等径超曲面**と呼ばれ，N^n は $V^{-1}(\cos(g\theta_1))$ の開部分多様体である. それぞれの $N_\pm := V^{-1}(\pm 1)$ は，$S^{n+1}(1)$ において少なくとも余次元 2 で埋め込まれたコンパクト**連結**極小部分多様体で，等径超曲面 N^n の**焦部分多様体**と呼ばれる．

N^n は，$S^{n+1}(1)$ に埋め込まれたコンパクト連結向き付けられた等径超曲面であると仮定する．上の議論から，我々は $N^n = V^{-1}(\cos(g\theta_1))$ で，各 $p \in N^n$ に対して $\mathbf{n}(p) = \dfrac{(\mathrm{grad} V)_{\mathbf{x}(p)}}{\|(\mathrm{grad} V)_{\mathbf{x}(p)}\|}$ と仮定することができる．このとき，次が成り立つ：

補題 3.1. 各 $p \in N^n$ について，

$$\cos\theta\, \mathbf{x}(p) + \sin\theta\, \mathbf{n}(p) \;\in\; V^{-1}(\cos(g\theta_1)) = N^n$$

となるための必要十分条件は，ある $\alpha = 1, \cdots, g$ が存在して，

$$\theta \;=\; \frac{2\pi(\alpha - 1)}{g} \quad \text{または} \quad 2\theta_1 + \frac{2\pi(\alpha - 1)}{g}$$

となることである．

次は，Münzner と Abresch による有名かつ重要な結果である：

定理 3.2 ([32]).

(1) g は，$1, 2, 3, 4$ または 6 でなければならない．

(2) もし $g = 6$ ならば, $m_1 = m_2$ である．

定理 3.3 ([1]). もし $g = 6$ ならば, $m_1 = m_2 = 1$ または 2 である．

3.2. **標準球面内の極小等径超曲面.** $S^{n+1}(1)$ の等径超曲面族の中に唯一つ極小等径超曲面 N^n が存在することが知られている. [31] から容易にその主曲率を次のように計算することができる (参照 [41, p.265]):

命題 3.1.

(1) $g=1$ ならば, $k_1=0$.

(2) $g=2$ ならば, $k_1=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ かつ $k_2=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$.

(3) $g=3$ ならば, $k_1=\sqrt{3}$, $k_2=0$ かつ $k_3=-\sqrt{3}$.

(4) $g=4$ ならば, $\kappa_1=\frac{\sqrt{m_1+m_2}+\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}}$, $\kappa_2=\frac{\sqrt{m_1+m_2}-\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}}$, $\kappa_3=-\frac{\sqrt{m_1+m_2}-\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}}$, $\kappa_4=-\frac{\sqrt{m_1+m_2}+\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}}$.

(5) $g=6$ ならば, $\kappa_1=2+\sqrt{3}$, $\kappa_2=1$, $\kappa_3=2-\sqrt{3}$, $\kappa_4=-(2-\sqrt{3})$, $\kappa_5=-1$, $\kappa_6=-(2+\sqrt{3})$.

3.3. **標準球面内の等質等径超曲面.** W.-Y. Hsiang, H. B. Lawson, Jr. ([21]) と高木亮一, 高橋恒郎 ([54]) により, 標準球面内の任意の等質等径超曲面は, 階数 2 のリーマン対称対の線型等方表現の主軌道として得られるという事実が知られている（この事実は, 標準球面上に作用する余等質性 1 のコンパクト・リー変換群の分類から知られ, 直接的幾何学的な証明を与えることは未解決問題である）.

TABLE 1. 標準球面内の等質等径超曲面

g	*Type*	(U,K)	dimN	m_1,m_2	K/K_0
1	$S^1\times$ BDII	$(S^1\times SO(n+2), SO(n+1))$ $n\geq 1$, $[\mathbf{R}\oplus A_1]$	n	n	S^n
2	BDII$\times$ BDII	$(SO(p+2)\times SO(n+2-p)$, $SO(p+1)\times SO(n+1-p))$ $1\leq p\leq n-1$, $[A_1\oplus A_1]$	n	$p, n-p$	$S^p\times S^{n-p}$
3	AI_2	$(SU(3), SO(3))\,[A_2]$	3	1, 1	$\frac{SO(3)}{\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_2}$
3	$\mathfrak{a}_2$	$(SU(3)\times SU(3), SU(3))\,[A_2]$	6	2, 2	$\frac{SU(3)}{T^2}$
3	AII_2	$(SU(6), Sp(3))\,[A_2]$	12	4, 4	$\frac{Sp(3)}{Sp(1)^3}$
3	EIV	$(E_6, F_4)\,[A_2]$	24	8, 8	$\frac{F_4}{Spin(8)}$
4	$\mathfrak{b}_2$	$(SO(5)\times SO(5), SO(5))\,[B_2]$	8	2, 2	$\frac{SO(5)}{T^2}$
4	AIII_2	$(SU(m+2), S(U(2)\times U(m)))$ $m\geq 2$, $[BC_2](m\geq 3), [B_2](m=2)$	$4m-2$	2, $2m-3$	$\frac{S(U(2)\times U(m))}{S(U(1)\times U(1)\times U(m-2))}$
4	BDI_2	$(SO(m+2), SO(2)\times SO(m))$ $m\geq 3$, $[B_2]$	$2m-2$	1, $m-2$	$\frac{SO(2)\times SO(m)}{\mathbf{Z}_2\times SO(m-2)}$
4	CII_2	$(Sp(m+2), Sp(2)\times Sp(m))$ $m\geq 2$, $[BC_2](m\geq 3), [B_2](m=2)$	$8m-2$	4, $4m-5$	$\frac{Sp(2)\times Sp(m)}{Sp(1)\times Sp(1)\times Sp(m-2)}$
4	DIII_2	$(SO(10), U(5))\,[BC_2]$	18	4, 5	$\frac{U(5)}{SU(2)\times SU(2)\times U(1)}$
4	EIII	$(E_6, U(1)\cdot Spin(10))\,[BC_2]$	30	6, 9	$\frac{U(1)\cdot Spin(10)}{S^1\cdot Spin(6)}$
6	$\mathfrak{g}_2$	$(G_2\times G_2, G_2)\,[G_2]$	12	2, 2	$\frac{G_2}{T^2}$
6	G	$(G_2, SO(4))\,[G_2]$	6	1, 1	$\frac{SO(4)}{\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_2}$

3.4. **OT-FKM 型等径超曲面.** 標準球面内の非等質等径超曲面のクリフォード構成は，尾関英樹，竹内勝 [49], [50] によって最初に発見され, D. Ferus, H. Karcher, H. F. Münzner [14] によって一般化された．それは，単位標準球面内の等径超曲面のもう一つ重要なクラスで，*OT-FKM* **型等径超曲面**と呼ばれる.

$Cl(\mathbf{R}^{m-1})$ をユークリッドベクトル空間 $(\mathbf{R}^{m-1}, \langle\ ,\ \rangle)$ 上のクリフォード代数とする.

次数 l の $\mathbf{R}^l$ 上の $Cl(\mathbf{R}^{m-1})$ の表現とは，代数準同型

$$Cl(\mathbf{R}^{m-1}) \longrightarrow M(l;\mathbf{R})$$

である.

$$Cl(\mathbf{R}^{m-1}) \cong Cl_0(\mathbf{R}^m) \supset Spin(m)$$

に注意する．このとき，$E_1, \cdots, E_{m-1} \in O(l)$ を,

$$E_i^2 = -\mathrm{I},\ E_iE_j = -E_jE_i,\ i \neq j$$

となるように選ぶことができる．$\mathbf{R}^{2l}$ 上の対称な線型自己準同型写像全体からベクトル空間を，$\mathfrak{h}(\mathbf{R}^{2l})$ によって表わす．$P_0, P_1, \cdots, P_m \in \mathfrak{h}(\mathbf{R}^{2l})$ を,

$$P_0(u,v) := (u,-v),\ P_1(u,v) := (v,u),\ P_{1+i}(u,v) := (E_iv, -E_iu)$$

によって定める.

$Cl(\mathbf{R}^{m-1})$ は，次数 l の既約表現をもつための必要十分条件は，$l = \delta(m)$ が次の表のように与えられことである:

m	$Cl(\mathbf{R}^{m-1})$	$\delta(m)$
1	$\mathbf{R}$	1
2	$\mathbf{C}$	2
3	$\mathbf{H}$	4
4	$\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$	4
5	$\mathbf{H}(2) = M(2,\mathbf{H})$	8
6	$\mathbf{C}(4) = M(4,\mathbf{C})$	8
7	$\mathbf{R}(8) = M(8,\mathbf{R})$	8
8	$\mathbf{R}(8)\oplus\mathbf{R}(8) = M(8,\mathbf{R})\oplus M(8,\mathbf{R})$	8
$k+8$	$M(Cl(\mathbf{R}^{k-1}),16)$	$16\delta(k)$

$k > 1$ なる $l = k\,\delta(m)$ に対して $Cl(\mathbf{R}^{m-1})$ の次数 l の任意の可約表現は，$\mathbf{R}^{\delta(m)}$ 上の $Cl(\mathbf{R}^{m-1})$ の k 個の既約表現の直和である.

系 $(P_1, \cdots, P_m)$ は，$\mathbf{R}^{2l}$ の**クリフォード系**と呼ばれる.

$$m_1 := m, \quad m_2 := l-m-1 = k\,\delta(m)-m-1. \tag{3.6}$$

とおく．このとき,

$$F(x) := \langle x,x\rangle^2 - 2\sum_{i=0}^{m}\langle P_ix, x\rangle^2 \tag{3.7}$$

によって定義された多項式関数 $F : \mathbf{R}^{2l} \to \mathbf{R}$ は，Cartan-Münzner 多項式である，即ち，F は $g = 4$ に対して Cartan-Münzner 微分方程式 (3.4) を満たす．従って，F は単位標準球面 $S^{2l-1}(1) \subset \mathbf{R}^{2l} = \mathbf{R}^l \oplus \mathbf{R}^l$ 内の 4 個の相異なる主曲率と重複度 $(m_1, m_2) = (m, l-m-1)$ をもつ等径超曲面を与える．これは，*OT-FKM* **型等径超曲面**と呼ばれる.

注意. 標準球面内の等質等径超曲面が OT-FKM 型であるための必要十分条件は，AIII_2, BDI_2, CII_2 あるいは EIII 型であることである.

TABLE 2. OT-FKM 型等径超曲面の主曲率と重複度

$k\backslash\delta(m)$	1	2	4	4	8	8	8	8	16	32	$\cdots$
1	–	–	–	–	$(5,2)$	$(6,1)$	–	–	$(9,6)$	$(10,21)$	$\cdots$
2	–	$(2,1)$	$(3,4)$	$(4,3)$	$(5,10)$	$(6,9)$	$(7,8)$	$(8,7)$	$(9,22)$	$(10,53)$	$\cdots$
3	$(1,1)$	$(2,3)$	$(3,8)$	$(4,7)$	$(5,18)$	$(6,17)$	$(7,16)$	$(8,15)$	$(9,38)$	$(10,85)$	$\cdots$
4	$(1,2)$	$(2,5)$	$(3,12)$	$(4,11)$	$(5,26)$	$(6,25)$	$(7,24)$	$(8,23)$	$(9,54)$	$\cdot$	$\cdots$
5	$(1,3)$	$(2,7)$	$(3,16)$	$(4,15)$	$(5,34)$	$(6,33)$	$(7,32)$	$(8,31)$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

3.5. **標準球面内の等径超曲面の分類問題.** 目下，標準球面内の等径超曲面の知られているすべての例は，等質等径超曲面と OT-FKM 型等径超曲面である．それらは，標準球面内のすべての等径超曲面を尽くであろうことが予想されている．

$N^n \subset S^{n+1}(1)$ 標準球面内の等径超曲面としよう．$g = 1, 2$ or 3 ならば, N^n は等質である (E. Cartan). $g = 6$ かつ $m = 1$ ならば, N^n は等質である (Dorfmeister and Neher [13], R. Miyaoka [29]). $g = 6$ かつ $m = 2$ の場合の等質性は，R. Miyaoka ([30]) による．

$g = 4$ ならば, 重複度 (m_1, m_2) は，等質なものまたは OT-FKM 型の例の重複度と同じでなければならない (Stolz [53]). さらに，N^n は，$(m_1, m_2) = (4,5), (3,4), (6,9), (7,8)$ の場合を除いて等質であるかまたは OT-FKM 型でなければならない (Cecil, Chi and Jensen [8], Immervoll [22]). 残された場合の研究は，Q.-S. Chi によって現在進展中である ([10], [11]).

4. 等径超曲面から得られる複素 2 次超曲面のラグランジュ部分多様体

4.1. **複素 2 次超曲面.** **複素 2 次超曲面**

$$Q_n(\mathbf{C}) \cong \widetilde{Gr}_2(\mathbf{R}^{n+2}) \cong SO(n+2)/(SO(2) \times SO(n))$$

は，階数 2 コンパクトエルミート対称空間である．ここで，

$$Q_n(\mathbf{C}) := \{[\mathbf{z}] \in \mathbf{C}P^{n+1} \mid z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 0\},$$

$$\widetilde{Gr}_2(\mathbf{R}^{n+2}) := \{W \mid \mathbf{R}^{n+2} \text{ の向き付けられた 2 次元ベクトル部分空間 }\}.$$

である．$Q_n(\mathbf{C})$ と $\widetilde{Gr}_2(\mathbf{R}^{n+2})$ の間の同一視は，

$$\mathbf{C}P^{n+1} \supset Q_n(\mathbf{C}) \ni [\mathbf{a} + \sqrt{-1}\,\mathbf{b}] \longleftrightarrow W = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \widetilde{Gr}_2(\mathbf{R}^{n+2}) \subset \bigwedge^2 \mathbf{R}^{n+2}$$

によって与えられる．ここで，$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ は向きと適合した W の正規直交基底とする．$n = 2$ のとき, $Q_2(\mathbf{C}) \cong S^2 \times S^2$ である．$n \geq 3$ ならば, $Q_n(\mathbf{C})$ は既約である．

$\mathbf{R}^{n+2}$ の標準内積から誘導された $Q_n(\mathbf{C}) \cong \widetilde{Gr}_2(\mathbf{R}^{n+2})$ 上の標準ケーラー計量 $g^{\mathrm{std}}_{Q_n(\mathbf{C})}$ は，エルミート対称空間で n に等しいアイシュタイン定数 κ をもつアイシュタイン-ケーラー計量である．

4.2. **標準球面内の向き付けられた超曲面のガウス写像.** $N^n \hookrightarrow S^{n+1}(1) \subset \mathbf{R}^{n+2}$ を $n+1$ 次元単位標準球面にはめ込まれた，または埋め込まれた，向き付けられた超曲面とする．

$\mathbf{x}$ で N^n の点の位置ベクトル，$\mathbf{n}$ で $S^{n+1}(1)$ における N^n の単位法ベクトル場を表わす．

$$\mathcal{G} : N^n \ni p \longmapsto [\mathbf{x}(p) + \sqrt{-1}\,\mathbf{n}(p)] = \mathbf{x}(p) \wedge \mathbf{n}(p) \in Q_n(\mathbf{C}) \cong \widetilde{Gr}_2(\mathbf{R}^{n+2})$$

によって定義された**ガウス写像**は，常にラグランジュはめ込みである．

命題 4.1 ([26], [27]).

(1) $N_1, N_2 \subset S^{n+1}(1)$ を単位標準球面の向き付けられた超曲面とする．このとき，N_1 と N_2 は $S^{n+1}(1)$ における同じ平行超曲面族に属することと $\mathcal{G}(N_1) = \mathcal{G}(N_2)$ は同値である．

(2) N^n を $S^{n+1}(1)$ における向き付けられた超曲面とする．N^n の変形に対するガウス写像は、ガウス写像 $\mathcal{G}$ のハミルトン変形を与える．逆は，N^n のガウス写像 $\mathcal{G}$ の十分小さなハミルトン変形は，$S^{n+1}(1)$ における超曲面 N^n のある変形に対応する．

κ_i $(i = 1, \cdots, n)$ で $N^n \subset S^{n+1}(1)$ の主曲率を表わす．$\kappa_i = \cot\theta_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ とおく，ここで，$0 < \theta_i < \pi$ とする．$N^n \subset S^{n+1}(1)$ 上の正規直交枠の局所場 $\{e_i\}$ を，$S^{n+1}(1)$ における $\mathbf{n}$ に関する N^n の第 2 基本形式 h が $h(e_i, e_j) = \kappa_i\,\delta_{ij}$ と対角化されるように選ぶ．$\{\theta^i\}$ をその双対余枠とする．このとき，ガウス写像 $\mathcal{G}$ による N^n 上の誘導計量 $\mathcal{G}^* g^{\mathrm{std}}_{Q_n(\mathbf{C})}$ は，

$$\mathcal{G}^* g^{\mathrm{std}}_{Q_n(\mathbf{C})} = \sum_{i=1}^{n} (1 + \kappa_i^2)\,\theta^i \otimes \theta^i. \tag{4.1}$$

のように表示される．

$\mathcal{G} : N^n \to Q_n(\mathbf{C})$ の平均曲率ベクトル場を，H で表わす．このとき，ガウス写像 $\mathcal{G}$ の平均曲率形式は，N^n の主曲率を用いて次のように表わされる:

補題 4.1 (Palmer [51]).

$$\alpha_{\mathrm{H}} = d\left(\mathrm{Im}\left(\log \prod_{i=1}^{n} (1 + \sqrt{-1}\kappa_i)\right)\right) = -d\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i\right).$$

特に，もし $N^n \subset S^{n+1}(1)$ が $S^{n+1}(1)$ 内の主曲率一定の向き付けられた超曲面ならば，ガウス写像 $\mathcal{G} : N^n \longrightarrow Q_n(\mathbf{C})$ は極小ラグランジュはめ込みである．

4.3. **等径超曲面のガウス像.** $N^n \hookrightarrow S^{n+1}(1) \subset \mathbf{R}^{n+2}$ は，$n+1$ 次元単位標準球面内に埋め込まれたコンパクト連結向き付けられた等径著曲面とする．この小節では，我々は小節 3.1 におけるものと同じ記号を使う．

補題 3.1 によって，各 $p \in N^n$ に対して

$$\mathbf{x}_\theta(p) := \cos\theta\,\mathbf{x}(p) + \sin\theta\,\mathbf{n}(p)$$

によって定義された正規測地線（大円）$\gamma = \gamma(\theta)$ は，$2g$ 個の点において，N^n と交わりをもつ：

$$\gamma \cap N^n = \{\mathbf{x}_\theta(p) \mid \theta = \frac{2\pi(\alpha-1)}{g} \text{ または } 2\theta_1 + \frac{2\pi(\alpha-1)}{g} \ (\exists \alpha = 1, \cdots, g)\}$$

各 $\mathbf{x}_\theta(p) \in \gamma \cap N^n$ に対して，$p_\theta \in N^n$ を位置ベクトル $\mathbf{x}_\theta(p) = \mathbf{x}(p_\theta)$ をもつ N^n の点とする．もし $\theta = \dfrac{2\pi(\alpha-1)}{g}$ $(\alpha = 1, \cdots, g)$ ならば，

$$\mathcal{G}(p_\theta) = \mathbf{x}(p_\theta) \wedge \mathbf{n}(p_\theta) = \mathbf{x}(p) \wedge \mathbf{n}(p) = \mathcal{G}(p)$$

である．もし $\theta = 2\theta_1 + \dfrac{2\pi(\alpha-1)}{g}$ $(\alpha = 1,\cdots,g)$ ならば，

$$\mathcal{G}(p_\theta) = \mathbf{x}(p_\theta) \wedge \mathbf{n}(p_\theta) = \mathbf{x}(p) \wedge (-\mathbf{n}(p)) = -\mathbf{x}(p) \wedge \mathbf{n}(p) \neq \mathcal{G}(p)$$

である．

逆に，もし $p, q \in N^n$ について $\mathcal{G}(p) = \mathcal{G}(q)$ ならば， ある $\theta = \dfrac{2\pi(\alpha-1)}{g}$ $(\alpha = 1,\cdots,g)$ があって $q = p_\theta$ が成り立つ．実際，$\mathbf{x}(p) \wedge \mathbf{n}(p) = \mathbf{x}(q) \wedge \mathbf{n}(q)$ だから，ある $0 \leq \psi < 2\pi$ があって，

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(q) &= \cos\psi\, \mathbf{x}(p) + \sin\psi\, \mathbf{n}(p),\\ \mathbf{n}(q) &= -\sin\psi\, \mathbf{x}(p) + \cos\psi\, \mathbf{n}(p)\end{aligned}$$

のように表わすことができ，ある $\alpha = 1,\cdots,g$ があって，$\psi = \dfrac{2\pi(\alpha-1)}{g}$ または $2\theta_1 + \dfrac{2\pi(\alpha-1)}{g}$ となることが分かる．もし $\psi = 2\theta_1 + \dfrac{2\pi(\alpha-1)}{g}$ ならば，$\mathcal{G}(p) \neq \mathcal{G}(q)$ であり， 矛盾．したがって，ある $\alpha = 1,\cdots,g$ があって，$\psi = \dfrac{2\pi(\alpha-1)}{g}$ が成り立つ．

これらの考察から，N^n 上の位数 g の有限巡回群の自由な群作用を定義することができる．写像

$$\nu : N^n \ni p \longmapsto \cos\left(\frac{2\pi}{g}\right)\mathbf{x}(p) + \sin\left(\frac{2\pi}{g}\right)\mathbf{n}(p) \in N^n \tag{4.2}$$

は，N^n からそれ自身の上への位数 g の微分同相写像である． $\{\mathrm{Id}_{N^n} = \nu^0, \nu, \cdots, \nu^{g-1}\}$ は，位数 g の有限巡回群で，N^n 上に自由に群作用する．$\mathbf{Z}_g := \{\mathrm{Id}_{N^n} = \nu^0, \nu, \cdots, \nu^{g-1}\}$ とおく．

命題 4.2. $p, q \in N^n$ とする． このとき，$\mathcal{G}(p) = \mathcal{G}(q)$ となることは，ある $v \in \mathbf{Z}_g$ があって $q = v(p)$ となることと同値である．

それゆえ， 次が得られる．

定理 4.1 ([26])**.** ガウス写像 $\mathcal{G} : N^n \longrightarrow Q_n(\mathbf{C})$ の像 $\mathcal{G}(N^n)$ は，$\mathbf{Z}_g$ の自由な群作用による商多様体 $N^n/\mathbf{Z}_g$ に微分同相である．即ち，$\mathcal{G}(N^n) \cong N^n/\mathbf{Z}_g$ である．従って，$\mathcal{G}(N^n)$ は，$Q_n(\mathbf{C})$ に埋め込まれたコンパクト連結極小ラグランジュ部分多様体である．

問題. 標準球面内の等径超曲面のガウス像として得られる複素 2 次超曲面に埋め込まれたコンパクト極小ラグランジュ部分多様体の性質を研究せよ．

微分同相写像 $\nu \in \mathbf{Z}_g$ の $p \in N^n$ における微分を計算せよ．$\{e_i \mid i = 1,\cdots,n\}$ を $A(e_i) = k_\alpha e_i$ なる T_pN^n の正規直交基底とし，$k_\alpha = \cot\theta_\alpha$ とおく． ここで，$0 < \theta_\alpha < \frac{\pi}{g}$ とする．このとき，次が成り立つ：

$$(d\nu)_p(e_i) = \partial_{e_i}\mathbf{x}_{\frac{2\pi}{g}} = (\cos\left(\frac{2\pi}{g}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{g}\right)\cot\theta_\alpha)\, e_i.$$

もし $g = 1$ ならば，$(d\nu)_p(e_i) = e_i\, (i = 1,\cdots,n)$ である．
もし $g = 2$ ならば，$(d\nu)_p(e_i) = -e_i\, (i = 1,\cdots,n)$ である．

$g \geq 3$ と仮定する．このとき，

$$
\begin{aligned}
& \cos(\frac{2\pi}{g}) \;-\sin(\frac{2\pi}{g}) \cot\theta_\alpha \;<\; 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \cot(\frac{2\pi}{g}) \;<\; \cot\theta_\alpha \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{2\pi}{g} \;>\; \theta_\alpha \;=\; \theta_1 + (\alpha-1)\frac{\pi}{g} \quad (\alpha = 1, \cdots, g) \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{(3-\alpha)\pi}{g} \;>\; \theta_1 \quad (\alpha = 1, \cdots, g)
\end{aligned}
$$

かつ

$$
\frac{2\pi}{g}\,(\alpha=1) \;>\; \frac{\pi}{g}\,(\alpha=2) \;>\theta_1>0\,(\alpha=3)\;\geq\cdots\geq -\frac{(g-3)\pi}{g}\,(\alpha=g)
$$

が成り立つ．従って，$(d\nu)_p : T_{\mathbf{x}}N \to T_{\mathbf{x}_\theta}N$ の負の固有値の個数は，m_1+m_2 に等しい．

補題 4.2. $g \geq 2$ と仮定する．このとき，微分同相写像 $\nu : N \to N$ が N の向きを保つための必要十分条件は，m_1+m_2 が偶数であることである．

注意．$g \geq 3$ ならば，$N^n \subset S^{n+1}(1)$ の上へのこの $\mathbf{Z}_g$-群作用は，$S^{n+1}(1)$ からの誘導計量を保存しない．$Q_n(\mathbf{C})$ から $\mathcal{G}$ によって誘導された N^n 上の計量 (4.1) は，$\mathbf{Z}_g$-群作用によって保存される．それは直接計算によっても検証することが可能である．

補題 3.1 から次がわかる：

$$
\frac{2n}{g} = \begin{cases} m_1+m_2 & (g \text{ が偶数のとき}), \\ 2\,m_1 & (g \text{ が奇数のとき}). \end{cases}
$$

ゆえに，補題 4.2 によって，$\mathcal{G}(N^n)$ の向き付け可能性は，次のように特徴付けられる．

定理 4.2.

(1) もし $\dfrac{2n}{g}$ が偶数ならば，$L=\mathcal{G}(N^n) \cong N^n/\mathbf{Z}_g$ は向き付け可能である．

(2) もし $\dfrac{2n}{g}$ が奇数ならば，$L=\mathcal{G}(N^n) \cong N^n/\mathbf{Z}_g$ は向き付け可能でない．

今，標準球面の等径超曲面のガウス像の極小マスロフ数は，次のように決定される．

定理 4.3 ([27])**.** $L=\mathcal{G}(N^n)$ は，$Q_n(\mathbf{C})$ に埋め込まれたコンパクトな単調で巡回的なラグランジュ部分多様体で，その極小マスロフ数 Σ_L は，

$$
\Sigma_L = \frac{2n}{g} = \begin{cases} m_1+m_2 & (g \text{ が偶数のとき}), \\ 2\,m_1 & (g \text{ が奇数のとき}),. \end{cases}
$$

によって与えられる．

証明. 定理 2.4 と $\mathcal{G}(N^n)$ の極小性によって，$\mathcal{G}(N^n)$ は，$Q_n(\mathbf{C})$ の単調なラグランジュ部分多様体である．さらに，定理 2.5 によって，$\mathcal{G}(N^n)$ は $Q_n(\mathbf{C})$ の巡回的なラグランジュ部分多様体で，公式 (2.3) を満たす． $M=Q_n(\mathbf{C})$ の場合において，$n \geq 2$ のとき $\gamma_{c_1}=n$，$n=1$ のとき $\gamma_{c_1}=2$ が成り立つ．定数 n_L を決定しよう．

$\tilde{N}^n$ を，$S^{n+1}(1)$ 上の単位接球面束 $US^{n+1}(1)=V_2(\mathbf{R}^{n+2})$ への N^n のルジュンドレ・リフトとする:

$$
N^n \longrightarrow \mathcal{G}(N^n) = N^n/\mathbf{Z}_g.
$$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{N}^n \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{Z}_g"] & V_2(\mathbf{R}^{n+2})|_{L^n} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"', "SO(2)"] & V_2(\mathbf{R}^{n+2}) \arrow[d, "\pi"', "SO(2)\cong U(1)\cong S^1"] \\
\mathcal{G}(N^n) \arrow[r, "="] & \mathcal{G}(N^n) = L^n \underset{\text{Lagr.}}{\subset} Q_n(\mathbf{C}) &
\end{tikzcd}$$

このとき，

$$\pi : V_2(\mathbf{R}^{n+2})|_L \longrightarrow L = \mathcal{G}(N^n)$$

は, 構造群 $SO(2)$ をもつ平坦主束で，被覆群 $\mathbf{Z}_g$ をもつ被覆写像

$$\pi : \tilde{N}^n \longrightarrow \mathcal{G}(N^n)$$

は，ホロノミー群 $\mathbf{Z}_g$ をもつホロノミー束と一致する:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_g &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \mid t = 0,\, 2\pi\frac{1}{g},\, \cdots,\, 2\pi\frac{g-1}{g} \right\} \\
&= \left\{ e^{\sqrt{-1}t} \mid t = 0, 2\pi\frac{1}{g}, \cdots, 2\pi\frac{g-1}{g} \right\}.
\end{aligned}$$

$\mathbf{C}$ 上への $SO(2) \cong U(1)$ の標準的群作用によって主ファイバー束

$$\pi : V_2(\mathbf{R}^{n+2})|_L \longrightarrow \mathcal{G}(N^n)$$

に付随した $\mathcal{G}(N^n)$ 上の平坦な複素直線束を E で表わす．

$Q_n(\mathbf{C}) = \widetilde{Gr}_2(\mathbf{R}^{n+2})$ 上のトートロジカル複素直線束 $\mathcal{W}$ は，各 $x = [\mathbf{a} + \sqrt{-1}\mathbf{b}] \in Q_n(\mathbf{C})$ に対して，

$$\mathcal{W}_x := \mathbf{C}(\mathbf{a} + \sqrt{-1}\mathbf{b})$$

によって定義される．このとき，もし $n \geq 2$ ならば $E = \mathcal{W}$ であり，もし $n = 1$ ならば $\otimes^2 E = \mathcal{W}$．実際，もし $n \geq 2$ ならば，$c_1(\mathcal{W})(\mathbf{C}P^1) = 1$ である．ここで，$\mathbf{C}P^1 := \{W \subset U \mid 1$ 次元複素ベクトル部分空間$\}$ で，U は $\mathbf{C}^{n+2}$ の複素 2-次元等方的ベクトル部分空間, 即ち, $U \perp \bar{U}$ である．

$k = 1, 2, \cdots, g$ に対して, $E|_L$ 上のホロノミー群 $\mathbf{Z}_g$ の生成元 $e^{\sqrt{-1}\frac{2\pi}{g}}$ は，$\otimes^k E|_L$ 上への $e^{\sqrt{-1}\frac{2\pi k}{g}}$ による積を誘導する．このようにして，$\otimes^k E|_L$ のホロノミー群は，$\mathbf{Z}_g$ の元 $e^{\sqrt{-1}\frac{2\pi k}{g}}$ によって生成される．よって，$\otimes^g E|_L$ は自明なホロノミー群をもち，$k = 1, 2, \cdots, g-1$ に対して，$\otimes^k E|_L$ は非自明なホロノミー群をもつ．それゆえ，$n \geq 2$ ならば $n_L = g$ で，$n = 1$ ならば $n_L = 2$ である．さらに，

$$\Sigma_L = \frac{2n}{g} = \begin{cases} \dfrac{2}{g}\, \dfrac{(m_1 + m_2)g}{2} = m_1 + m_2 & (g \text{ が偶数のとき}), \\[2ex] \dfrac{2}{g}\, g\, m_1 = 2m_1 & (g \text{ が奇数のとき}). \end{cases}$$

□

注意．定理 4.1 および 4.3 は，[26], [27] で証明の詳細なしに述べられている．

5. 複素 2 次超曲面のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体の分類

[26] では，我々は，複素 2 次超曲面内のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体の分類を与えた．ここでは，手短に我々の分類理論を説明する．

最初に，我々は，$N^n \subset S^{n+1}(1)$ が**等質**（即ち，コンパクト・リー群 $K \subset SO(n+2)$ の軌道）であることと，ガウス像 $\mathcal{G}(N^n)$ が $Q_n(\mathbf{C})$ において**等質**であることは同値であることを考察した（[26, p.759, Proposition 3.1]）．前述のように，すべての等質等径超曲面 $N^n \subset S^{n+1}(1)$ は，階数 2 リーマン対称空間の線型等方表現の主軌道として得られることが知られている．さらに，我々は，(U,K) の K による $S^{n+1}(1)$ 上への群作用は，標準球面上への余等質性 1 の**極大な**群作用であることに注意すべきである（[21]）．

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を (U,K) の対称リー代数の標準分解，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ の極大可換部分ベクトル空間とする．$\mathfrak{a} \cap S^{n+1}(1)$ の各正則元 H に対して，単位標準球面内の等質等径超曲面 $N^n := (\mathrm{Ad}K)H \subset S^{n+1}(1) \subset \mathbf{R}^{n+2} \cong \mathfrak{p}$ を得る．そのガウス像は，$\mathcal{G}(N^n) = (\mathrm{Ad}K)[\mathfrak{a}] \subset \widetilde{Gr}_2(\mathfrak{p}) \cong Q_n(\mathbf{C})$ である．このとき，$\mathfrak{p}$ 上への K の線型等方群作用から誘導された $Q_n(\mathbf{C})$ の上への K の群作用に関する**標準的**運動量写像 $\tilde{\mu}$ は，次のように与えられる:

$$\tilde{\mu} : Q_n(\mathbf{C}) \cong \widetilde{Gr}_2(\mathfrak{p}) \ni [\mathbf{a} + \sqrt{-1}\mathbf{b}] = [W] \longmapsto -[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \in \mathfrak{k} \cong \mathfrak{k}^*$$

ここで，$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ は，$W \subset \mathfrak{p}$ の向きと適合した正規直交基底である．このようにして，

$$\mathcal{G}(N^n) = \tilde{\mu}^{-1}(0).$$

を得る．

さて，L は，$Q_n(\mathbf{C})$ におけるコンパクト等質ラグランジュ部分多様体であると仮定する．即ち，$SO(n+2)$ のあるコンパクト連結リー部分群 G があって，$L = K' \cdot [V_0]$ として与えられる．このとき，$v \in S^{n+1}(1)$ があって，$N^n = K' \cdot v \subset S^{n+1}(1)$ は $S^{n+1}(1)$ の等質等径超曲面となることを示すことができる．よって，連結コンパクトな K と対称リー代数 $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ をもつ階数 2 のコンパクト・リーマン対称対 (U,K) があって，$\mathfrak{p} = \mathbf{R}^{n+2}$, $K' \subset \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(K)$，$N^n = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(K)v$ となる．運動量写像の議論と麻生透 [4] による球面上の余等質性 1 コンパクト群作用の完全な分類からいくつかの結果を使って，我々は，$L = K' \cdot [V_0] = K \cdot [V_0]$ を示した．ある $\eta \in \mathfrak{c}(\mathfrak{k})$ が存在して，$K \cdot [V_0] = \tilde{\mu}^{-1}(\eta)$ となることに注意する．従って，ラグランジュ軌道に対する平均曲率形式と運動量写像の関係公式（参照 [44] 補題 3.1 ）によって，まず次が得られる：

定理 5.1 ([26]). $Q_n(\mathbf{C})$ 内のすべてのコンパクト極小等質ラグランジュ部分多様体 L^n は，$S^{n+1}(1)$ 内のコンパクト等質等径超曲面 N^n のガウス像 $\mathcal{G}(N^n)$ である．

さらに，リー代数と運動量写像の議論によって，我々は次を示した．

補題 5.1 ((([26])). (1) もし (U,K) が，*(i)* $(S^1 \times SO(3), SO(2))$, *(ii)* $(SO(3) \times SO(3), SO(2) \times SO(2))$, *(iii)* $(SO(3) \times SO(n+1), SO(2) \times SO(n))$ または *(iv)* $(SO(m+2), SO(2) \times SO(m))$ $(n = 2m-2)$ ならば，ある $\xi \in \mathfrak{c}(\mathfrak{k}) \cap \mathrm{Im}(\mu) \neq \{0\}$ が存在して，$L = \mu^{-1}(\xi) \subset Q_n(\mathbf{C})$ となる．この場合，$Q_n(\mathbf{C})$ において，ラグランジュ軌道の非自明族がある．

(2) もしそうでなければ，$\mathfrak{c}(\mathfrak{k}) \cap \mathrm{Im}(\mu) = \{0\}$ かつ $L = \mathcal{G}(N^n) = \mu^{-1}(0) \subset Q_n(\mathbf{C})$ で，それは $Q_n(\mathbf{C})$ の極小ラグランジュ部分多様体である．

(1) のそれぞれの場合における $Q_n(\mathbf{C})$ のラグランジュ軌道の非自明族は，次のように具体的に記述される：

(i) もし (U,K) が $(S^1 \times SO(3), SO(2))$ ならば，L は $Q_1(\mathbf{C}) \cong S^2$ の大円または小円である．

(ii) もし (U,K) が $(SO(3)\times SO(3), SO(2)\times SO(2))$ ならば, $Q_2(\mathbf{C})\cong S^2\times S^2$ において, L は S^2 の大円または小円の直積である.

(iii) もし (U,K) が $(SO(3)\times SO(n+1), SO(2)\times SO(n))$ $(n\geq 3)$ ならば, ある $\lambda\in S^1\setminus\{\pm\sqrt{-1}\}$ が存在して,

$$L = K\cdot[W_\lambda]\subset Q_n(\mathbf{C})$$

となる. ここで, $K\cdot[W_\lambda]$ $(\lambda\in S^1)$ は, 次を満たすラグランジュまたは等方的な軌道の S^1-族である:

(a) $K\cdot[W_1]=K\cdot[W_{-1}]=\mathcal{G}(N^n)$ は, $Q_n(\mathbf{C})$ の全測地的ラグランジュ部分多様体である.

(b) 各 $\lambda\in S^1\setminus\{\pm\sqrt{-1}\}$ に対して,

$$K\cdot[W_\lambda]\cong(S^1\times S^{n-1})/\mathbf{Z}_2\cong Q_{2,n}(\mathbf{R})$$

は, $Q_n(\mathbf{C})$ のハミルトン極小ラグランジュ部分多様体で, $\nabla S=0$ を満たす. とくに, $\nabla\alpha_{\mathrm{H}}=0$.

(c) $K\cdot[W_{\pm\sqrt{-1}}]$ は, $Q_n(\mathbf{C})$ の等方的な部分多様体で $\dim K\cdot[W_{\pm\sqrt{-1}}]=0$ (1点!).

(iv) もし (U,K) が $(SO(m+2), SO(2)\times SO(m))$ $(n=2m-2)$ ならば, ある $\lambda\in S^1\setminus\{\pm\sqrt{-1}\}$ が存在して,

$$L = K\cdot[W_\lambda]\subset Q_n(\mathbf{C})$$

となる. ここで, $K\cdot[W_\lambda]$ $(\lambda\in S^1)$ は次を満たすラグランジュまたは等方的な軌道の S^1-族である:

(a) $K\cdot[W_1]=K\cdot[W_{-1}]=\mathcal{G}(N^n)$ は, $Q_n(\mathbf{C})$ の極小 (全測地的でない) ラグランジュ部分多様体である.

(b) 各 $\lambda\in S^1\setminus\{\pm\sqrt{-1}\}$ に対して,

$$K\cdot[W_\lambda]\cong(SO(2)\times SO(m))/(\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_4\times SO(m-2))$$

は, $Q_n(\mathbf{C})$ のハミルトン極小ラグランジュ部分多様体で, $\nabla S\neq 0$ かつ $\nabla\alpha_{\mathrm{H}}=0$ である.

(c) $K\cdot[W_{\pm\sqrt{-1}}]\cong SO(m)/S(O(1)\times O(m-1))\cong\mathbf{R}P^{m-1}$ は, $Q_n(\mathbf{C})$ の等方的な部分多様体で, $\dim K\cdot[W_{\pm\sqrt{-1}}]=m-1$ である.

6. 等質等径超曲面のガウス像のハミルトン安定性

N^n は, $S^{n+1}(1)$ に埋め込まれたコンパクト等径超曲面と仮定する. Palmer ([51]) は, ガウス写像 $\mathcal{G}:N^n\longrightarrow Q_n(\mathbf{C})$ がハミルトン安定であるのは, $N^n=S^n\subset S^{n+1}(1)$ $(g=1)$ のときであり, そのときに限ることを示した.

問題. コンパクト極小ラグランジュ部分多様体として $Q_n(\mathbf{C})$ に埋め込まれたそのガウス像 $L=\mathcal{G}(N^n)\cong N^n/\mathbf{Z}_g$ のハミルトン安定性を研究せよ.

$g=1$ の場合, $N^n=S^n$ は, 大球または小球であり, $\mathcal{G}(N^n)\cong S^n$ は強ハミルトン安定である. より強く, それは極小部分多様体として安定である ([55]). n が偶数のとき, それは実ホモロジー類で体積最小である. なぜならば, それは不変 n 次微分形式によってキャリブレイトされた部分多様体である (Gluck, Morgan and Ziller [16]). n が奇数のときは, それはキャリブレイトされることは不可能である. なぜならば, $H^n(Q_n(\mathbf{C});\mathbf{R})=\{0\}$. n が偶数のとき, $H^n(Q_n(\mathbf{C}),\mathbf{R})\cong\mathbf{R}$ である. n が奇数のとき, $\pi_n(Q_n(\mathbf{C}))\cong\mathbf{Z}_2$ かつ, 任意の係数環 F に対して $H_n(Q_n(\mathbf{C}),F)\cong\{0\}$ である.

一般の n に対して，全測地的ラグランジュ部分多様体 $S^n \subset Q_n(\mathbf{C}) \cong \widetilde{Gr}_2(\mathbf{R}^{n+2})$ は，ハミルトン変形で体積最小であることを証明した．[23, p.18-19] も見よ．

$g=2$ の場合は, L がハミルトン安定でないのは，$m_2-m_1 \geq 3$ のときであり, そのときに限る．L がハミルトン安定だが強ハミルトン安定ではないのは，$m_2-m_1=2$ のとき, そのときに限る．L が強ハミルトン安定であるのは $m_2-m_1<2$ のときであり，そのときに限る．

ガウス像 $L=\mathcal{G}(N^n)$ が全測地的なラグランジュ部分多様体，即ち， $Q_n(\mathbf{C})$ の実形 $Q_{m_1+1,m_2+1}(\mathbf{R})$，であるのは，$g=1$ または $g=2$ のときであり，そのときに限る．

$g=3$ の場合には，$L=\mathcal{G}(N^n)$ は 強ハミルトン安定である（[26]）．

注意．$g=3$ のとき， $Q_n(\mathbf{C})$ から誘導された $\mathcal{G}(N^n)$ 上の不変計量は，正規等質計量であり ([26])，よって $\mathcal{G}(N^n)$ は，非負断面曲率をもつコンパクト極小ラグランジュ部分多様体だが，$\nabla S \neq 0$ である (定理 2.1 と比較).

定理 6.1 ([28]). $g=6$ で，等質 $L=SO(4)/(\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_2)\cdot\mathbf{Z}_6$ $(m_1=m_2=1)$ または $L=G_2/T^2\cdot\mathbf{Z}_6$ $(m_1=m_2=2)$ と仮定する．このとき，L は強ハミルトン安定である．

$g=4$ の場合，すでに述べたように，等質なものと非等質なものがある (Ozeki-Takeuchi, Ferus-Karcher-Münzner, Cecil-Chi-Jensen, Immervoll).

定理 6.2 ([28]). $g=4$ で $L=\mathcal{G}(N^n)$ は等質と仮定する． このとき，

(1) $L=SO(5)/T^2\cdot\mathbf{Z}_4$ $(m_1=m_2=2)$ は，強ハミルトン安定である．
(2) $L=U(5)/(SU(2)\times SU(2)\times U(1))\cdot\mathbf{Z}_4$ $(m_1=4, m_2=5)$ は，強ハミルトン安定である．
(3) $L=(SO(2)\times SO(m))/(\mathbf{Z}_2\times SO(m-2))\cdot\mathbf{Z}_4$ $(m_1=1, m_2=m-2, m\geq 3)$ とする．もし $m_2-m_1\geq 3$ ならば, L はハミルトン安定でない．もし $m_2-m_1=2$ ならば， L はハミルトン安定だが, 強ハミルトン安定でない．もし $m_2-m_1=1$ または 0, L は強ハミルトン安定である．
(4) $L=S(U(2)\times U(m))/S(U(1)\times U(1)\times U(m-2)))\cdot\mathbf{Z}_4(m_1=2, m_2=2m-3, m\geq 2)$ とする．もし $m_2-m_1\geq 3$ ならば, L はハミルトン安定でない．もし $m_2-m_1=1$ または -1, L は強ハミルトン安定である．
(5) $L=Sp(2)\times Sp(m)/(Sp(1)\times Sp(1)\times Sp(m-2)))\cdot\mathbf{Z}_4$ $(m_1=4, m_2=4m-5, m\geq 2)$ とする．もし $m_2-m_1\geq 3$ ならば, L はハミルトン安定でない．もし $m_2-m_1=-1$ ならば, L は強ハミルトン安定である．
(6) $L=U(1)\cdot Spin(10)/(S^1\cdot Spin(6))\cdot\mathbf{Z}_4$ $(m_1=6, m_2=9,$ *thus* $m_2-m_1=3!)$ は，強ハミルトン安定である*!*

定理 6.3 ([28]). (U,K) は, EIII 型, 即ち $(U,K)\neq(E_6, U(1)\cdot Spin(10))$，でないと仮定する．このとき，$L=\mathcal{G}(N)$ がハミルトン安定でないのは，$|m_2-m_1|\geq 3$ のとき，そのときに限る．さらに， もし (U,K) は, EIII 型, 即ち $(U,K)\neq(E_6, U(1)\cdot Spin(10))$ ならば，$(m_1,m_2)=(6,9)$ だが，$L=\mathcal{G}(N)$ は，強ハミルトン安定である．

7. 標準球面の余接ベクトル束内の余等質性 1 特殊ラグランジュ部分多様体

$TS^{n+1}(1)$ および $T^*S^{n+1}(1)$ を，それぞれ $(n+1)$ 次元単位標準球面 $S^{n+1}(1)$ の接ベクトル束および余接ベクトル束とする．特殊直交群 $SO(n+2)$ は，等長変換群の単位元成分として $S^{n+1}(1)\subset\mathbf{R}^{n+2}$ 上に効果的かつ推移的に群作用し，$TS^{n+1}(1)$

および $T^*S^{n+1}(1)$ 上にも自然な仕方で群作用を誘導する．$S^{n+1}(1)$ の標準計量に関して，$TS^{n+1}(1)$ を $T^*S^{n+1}(1)$ と同一視する．

より一般に，N^m は $S^{n+1}(1)$ にはめ込まれた m 次元部分多様体であると仮定する．$S^{n+1}(1)$ における N^m の**余法ベクトル束**（*conormal vector bundle*）は，

$$\nu_N^* := \coprod_{p \in N^m} \left\{ \alpha \in T_p^* S^{n+1}(1) \mid \alpha(T_p N^m) = 0 \right\}$$

と定義され，その**単位余法ベクトル束**（*unit conormal bundle*）を，

$$U(\nu_N^*) := \{ \xi \in \nu_N^* \mid \|\xi\| = 1 \}$$

と定める．余法ベクトル束 ν_N^* は，$S^{n+1}(1)$ の余法ベクトル束 $T^*S^{n+1}(1)$ におけるラグランジュ部分多様体であることは古典的によく知られた事実である．単位余法ベクトル束 $U(T^*S^{n+1}(1))$ は，スティーフェル多様体

$$\begin{aligned} V_2(\mathbf{R}^{n+2}) :=& \{ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^{n+2},\ \|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1,\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0 \} \\ \cong& SO(n+2)/SO(n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

に微分同相である．さらに，単位余法ベクトル束 $U(T^*S^{n+1}(1))$ は，$\widetilde{Gr}_2(\mathbf{R}^{n+2}) \cong Q_n(\mathbf{C})$ 上の S^1-主束である．ここで，$U(T^*S^{n+1}(1))$ は，標準的な接触構造をもち，N の単位余法ベクトル束 $U(\nu_N^*)$ は，$U(T^*S^{n+1}(1))$ のルジャンドレ部分多様体である．このとき，p_2 による $U(\nu_N^*)$ の射影は，$Q_n(\mathbf{C})$ にはめ込まれたラグランジュ部分多様体を与える．$N^m = N^{n+1}$ が $S^{n+1}(1)$ における向き付けられた超曲面である場合 ($U(\nu_N^*)$ の連結成分をとるならば)，この構成は，前出のガウス写像構成と一致する．次のダイアグラムが成り立つ:

$$\begin{tikzcd}
\nu_N^* \arrow[r, "\text{Lag.}"'] \arrow[d] & T^*S^{n+1}(1) \arrow[d] & \\
U(\nu_N^*) \arrow[r, "\text{Leg.}"'] \arrow[d] & U(T^*S^{n+1}(1)) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "p_2"', "S^1"] & V_2(\mathbf{R}^{n+2}) \arrow[d, "p_1"', "S^n"] \\
p_2(U(\nu_N^*)) \arrow[r, "\text{Lag.}"'] & Q_n(\mathbf{C}) & S^{n+1}(1) \supset N^m
\end{tikzcd}$$

imm. submfd.

単位余接ベクトル束 $U(T^*S^{n+1}(1)) \cong V_2(\mathbf{R}^{n+2})$ は，$\widetilde{Gr}_2(\mathbf{R}^{n+2}) \cong Q_n(\mathbf{C})$ 上の標準的な等質（$SO(n+2)$-不変な）アインシュタイン-佐々木多様体構造をもち，$(0,\infty) \times V_2(\mathbf{R}^{n+2}) = CV_2(\mathbf{R}^{n+2}) \times CU(T^*S^{n+1}(1)) \cong TS^{n+1}(1) \setminus \{0\}$ 上の対応する錐リーマン計量は，リッチ平坦ケーラー計量である（参照 [6]）．さらに，錐 $CU(T^*S^{n+1}(1))$ over $U(T^*S^{n+1}(1))$ は，ケーラー錐計量に関して $CV_2(\mathbf{R}^{n+2})$ におけるラグランジュ部分多様体である．このとき，次の 3 条件は互いに同値であることはよく知られている：

(1) $p_2(U(\nu_N^*))$ は，標準エルミート対称アインシュタイン-ケーラー計量に関して $Q_n(\mathbf{C})$ の極小ラグランジュ部分多様体である．
(2) $U(\nu_N^*)$ は，標準的な等質アインシュタイン-佐々木計量に関して $U(T^*S^{n+1}(1)) \cong V_2(\mathbf{R}^{n+2})$ の極小レジュンドレ部分多様体である．

(3) $CU(\nu_N^*)$ は，リッチ平坦ケーラー錐計量に関して $CV_2(\mathbf{R}^{n+2})$ における極小ラグランジュ部分多様体である．よって，ある位相に対する特殊ラグランジュ部分多様体である．

それゆえ，$S^{n+1}(1)$ における各等径超曲面 N^n は，リッチ平坦ケーラー錐計量を備えた $CV_2(\mathbf{R}^{n+2})$ における特殊ラグランジュ部分多様体を与える．とくに，もし N^n が $S^{n+1}(1)$ の等質等径超曲面であるならば，錐 $CU(\nu_N^*)$ は，リッチ平坦ケーラー錐計量をもつ $CV_2(\mathbf{R}^{n+2})$ における余等質性 1 特殊ラグランジュ部分多様体である．

Stenzel ([52]) は，コンパクト階数 1 対称空間 G/K の（余）接ベクトル束上に G の誘導群作用で不変な（よって，余等質性 1 の）完備なリッチ平坦なケーラー計量を構成した．その計量は，**シュテンツェル計量**（*Stenzel meteric*）と呼ばれる．$T^*S^{n+1}(1) \cong TS^{n+1}(1)$ 上のシュテンツェル計量は，$SO(n+2)$ の標準群作用で不変な完備リッチ平坦なケーラー計量である．

S. Karigiannis と M. Min-Oo ([25]) は，N^m が $S^{n+1}(1)$ のおける austere 部分多様体であることと，その余法ベクトル束 ν_N^* がシュテンツェル計量に関して $T^*S^{n+1}(1) \cong TS^{n+1}(1)$ における特殊ラグランジュ部分多様体であることが，同値であることを示した．ここで，リーマン多様体の極小部分多様体が，各法ベクトル ν に対して，形作用素 A_ν の固有値の集合が (-1) 倍で不変であるとき，*austere* であると呼ばれる ([19, p.102])．

$S^{n+1}(1)$ 内の極小等径超曲面 N^n が，$S^{n+1}(1)$ における austere 部分多様体であるための必要十分条件は，$m_1 = m_2$ であることに注意する (命題 3.1 を見よ)．

一方，補題 4.1 によって，もし $S^{n+1}(1)$ 内の向き付けられた極小超曲面 N^n が austere ならば，ガウス写像 $\mathcal{G} : N^n \to Q_n(\mathbf{C})$ が極小ラグランジュはめ込みである．このようにして，$CU(\nu_{N^n}^*)$ は，リッチ平坦ケーラー錐計量をもつ $CV_2(\mathbf{R}^{n+2})$ における特殊ラグランジュ部分多様体であり，同時に，その余法ベクトル束 $\nu_{N^n}^*$ は，シュテンツェル計量に関して $T^*S^{n+1}(1) \cong TS^{n+1}(1)$ の特殊ラグランジュ部分多様体である．しかしながら，もし N^n が $S^{n+1}(1)$ の austere ではない等径超曲面ならば，$CU(\nu_{N^n}^*)$ は，リッチ平坦ケーラー錐計量をもつ $CV_2(\mathbf{R}^{n+2})$ の特殊ラグランジュ部分多様体であるが，Karigiannis と Min-Oo の結果によって，その余法ベクトル束 $\nu_{N^n}^*$ は，シュテンツェル計量に関して $T^*S^{n+1}(1) \cong TS^{n+1}(1)$ における特殊ラグランジュ部分多様体ではない，ということには注意すべきである．そしてまた，もし N^n が $S^{n+1}(1)$ の austere 等質等径超曲面ならば，その余法ベクトル束 $\nu_{N^n}^*$ は，シュテンツェル計量に関して $T^*S^{n+1}(1) \cong TS^{n+1}(1)$ の余等質性 1 の特殊ラグランジュ部分多様体である，ということもわかる．

問題. $T^*S^{n+1}(1) \cong TS^{n+1}(1)$ 内の余等質性 1 特殊ラグランジュ部分多様体を分類せよ．

最近，橋本要 (大阪市立大学, D3) と酒井高司 (首都大学東京/OCAMI) ([20]) は，N^n が $S^{n+1}(1)$ 内の $g = 1, 2$ の等径超曲面の場合に，リッチ平坦ケーラー錐計量をもつ $CV_2(\mathbf{R}^{n+2})$ 内の特殊ラグランジュ錐 $CU(\nu_{N^n}^*)$ から変形されたシュテンツェル計量に関する $T^*S^{n+1}(1) \cong TS^{n+1}(1)$ 内の余等質性 1 特殊ラグランジュ部分多様体の分類問題を詳細に研究している．彼等の研究は，目下進展中である．

問題. $g = 3, 4, 6$ の場合に，そのような余等質性 1 特殊ラグランジュ部分多様体を研究せよ．

$T^*S^{n+1}(1) \cong TS^{n+1}$ 内の余等質性 1 特殊ラグランジュ部分多様体を分類するためには，そのようなコンパクトリー群の作用を決定することがまず必要である．これに関しては，次を示すことができる．

定理 7.1. $K \subset SO(n+1)$ を連結コンパクトなリー部分群とする．シュテンツェル計量のケーラー形式に関する K の TS^{n+1} 上への群作用に対する標準的な運動量写

像を $\mu: TS^{n+1} \to \mathfrak{k}$ によって表わす．今，$K \subset SO(n+1)$ の群作用が，

$$L \subset \mu^{-1}(0)$$

なる余等質性 1 ラグランジュ部分多様体 $L \subset TS^{n+1}$ をもつと仮定する．このとき，$S^n(1)$ 上への K の群作用は，余等質性 1 をもつ．

8. 擬リーマンの場合への拡張

問題. 実双曲空間形や擬リーマン空間形内の向き付けられた超曲面の場合に同様な理論を研究せよ．我々のガウス写像構成の実双曲空間形や擬リーマンの場合への拡張を研究することも興味ある問題である．

私の新しい博士課程大学院学生，櫻井基晴 (大阪市立大学, D1) は，実双曲空間形や擬リーマン空間形内の向き付けられた擬リーマン超曲面に対するガウス写像のラグランジュ性や平均曲率形式公式の拡張を研究している．つい最近，そのいくつかの結果が Anciaux [2] によってても得られていることを知った．

J. Hahn's work ([17], [18]) の研究から，擬リーマンの向き付けられた 2 次元ベクトル部分空間の実グラスマン多様体の極小ラグランジュ部分多様体の等質な例や非等質な例など多くの興味深い例を得ることができる．

References

[1] U. Abresch, *Isoparametric hypersurfaces with four and six principal curvatures.* Math. Ann. **264** (1983), 283–302.

[2] H. Anciaux, *Spaces of geodesics of pseudo-Riemannian space forms and normal congruences of hypersurfaces.* arXiv:1112.1758v2 [math.DG] 9 Dec 2011.

[3] A. Amarzaya and Y. Ohnita, *Hamiltonian stability of certain minimal Lagrangian submanifolds in complex projective spaces*, Tohoku Math. J. **55** (2003), 583–610. (a list of misprints : http://math01.sci.osaka-cu.ac.jp/~ohnita/paper/ListOfCorrect.pdf)

[4] T. Asoh, *Compact transformation groups on $\mathbf{Z}_2$-cohomology spheres with orbits of codimension* 1, Hiroshima Math. J. **11**, 571–616 (1981). *Supplement to "Compact transformation groups on $\mathbf{Z}_2$-cohomology spheres with orbits of codimension* 1*"*. Hiroshima Math. J. **13**, 647–652 (1983)

[5] A. Borel and F. Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces,* I. Amer. J. Math. **80** (1958), 458–538.

[6] C. Boyer and K. Galicki, *Sasakian Geometry.* Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2008.

[7] T. E. Cecil, *Isoparametric and Dupin hypersurfaces.* Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, *4* (2008), 062, 1–28.

[8] T. E. Cecil, Q.-S. Chi and G. R. Jensen, *Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures.* Ann. of Math. *166* (2007), 1–76.

[9] B. Y. Chen, *Geometry of Submanifolds and its Applications*, Science University of Tokyo, 1981.

[10] Q.-S. Chi, *Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures,* II. arXiv:1002.1345v2 [math.DG] 3Jun 2010.

[11] Q.-S. Chi, *Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures,* III. arXiv:1104.3249v2 [math.DG] 19 May 2011.

[12] P. Dazord, *Sur la geometrie des sous-fibres et des feuilletages lagrangiens*, (French) [*On the geometry of subbundles and Lagrange foliations*]. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 14 (1981), no. 4, 465–480.

[13] J. Dorfmeister and E. Neher, *Isoparametric hypersurfaces, case $g = 6$, $m = 1$.* Comm. Algebra **13** (1985), 2299–2368.

[14] D. Ferus, H. Karcher and H. F. Münzner, *Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen.* Math. Z. **177** (1981), 479–502.

[15] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Intersection Floer Theory - anomaly and obstruction.* AMS/IP Studies in Advanced Math. **46**, International Press/Amer. Math. Soc. (2009).

[16] H. Gluck, F. Morgan and W. Ziller, *Calibrated geometries in Grassmann manifolds.* Comment. Math. Helv. **69** (1989), 256–268.

[17] J. Hahn, *Isoparametric hypersurfaces in the pseudo-Riemannian space forms.* Math. Z. **187** (1984), 195–208.

[18] J. Hahn, *Isotropy representations of semisimple symmetric spaces and homogeneous hypersurfaces.* J. Math. Soc. Japan **40** (1988), 271–288.

[19] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries.* Acta Mathematica **148** (1982), 47–157.

[20] K. Hashimoto and T. Sakai, *Cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere.* To appear in Tohoku Math. J.

[21] W.-Y. Hsiang and H. B. Lawson, Jr., *Minimal submanifolds of low cohomogeneity.* J. Differential Geom. **5** (1971), 1–38.

[22] S. Immervoll, *On the classification of isoparametric hypersurfaces with four distinct principal curvatures in spheres.* Ann. of Math. **168** (2008), 1011–1024.

[23] 入江　博，**コンパクト型** *Hermite* **対称空間の実形の対の** *Floer* **ホモロジーとその応用**. 第 58 回幾何学シンポジウム 予稿集，2011 年 8 月 27 日 - 30 日，山口大学，pp9–21.

[24] H. Iriyeh, H. Ono and T. Sakai, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type.* Tokyo Metropolitan University Mathematics and Information Sciences Preprint Series, 2011: No. 2. Received on February 8, 2011.

[25] S. Karigiannis and M. Min-Oo, *Calibrated subbundles in non-compact manifolds of special holonomy,* An. Global Anal. Geom. **28** (2005), 371–394.

[26] H. Ma and Y. Ohnita, *On Lagrangian submanifolds in complex hyperquadrics and isoparametric hypersurfaces in spheres.* Math. Z. **261** (2009), 749–785.

[27] H. Ma and Y. Ohnita, *Differential Geometry of Lagrangian Submanifolds and Hamiltonian Variational Problems.* in Harmonic Maps and Differential Geometry, Contemporary Mathematics vol. 542, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 115-134.

[28] H. Ma and Y. Ohnita, *Hamiltonian stability of the Gauss images of homogeneous isoparametric hypersurfaces.* a preprint (2010).

[29] R. Miyaoka, *The Dorfmeister-Neher theorem on isoparametric hypersurfaces.* Osaka J. Math. **46** (2009), no. 3, 695–715.

[30] R. Miyaoka, *Isoparametric hypersurfaces with* $(g, m) = (6, 2)$. a preprint, 2009.

[31] H. F. Münzner, *Isoparametrische Hyperfläche in Sphären.* Math. Ann. **251** (1980), 57–71.

[32] H. F. Münzner, *Isoparametrische Hyperfläche in Sphären,* II. Math. Ann. **256** (1981), 215–232.

[33] Y. G. Oh, *Second variation and stabilities of minimal Lagrangian submanifolds in Kähler manifolds.* Invent. math. **101** (1990), 501–519.

[34] Y. G. Oh, *Tight Lagrangian submanifolds in* $\mathbf{C}P^n$. Math. Z. **207** (1991), 409–416.

[35] Y. G. Oh, *Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations.* Math. Z. **212** (1993), 175–192.

[36] Y. G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks,* I. Comm. Pure. Appl. Math. **46** (1993), 949–993. *Appendum to "Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks,* I". Comm. Pure. Appl. Math. **48** (1995), 1299–1302.

[37] Y. G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks,* II: $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R}P^n)$. Comm. Pure. Appl. Math. **46** (1993), 949–994.

[38] Y. G. Oh, *Mean curvature vector and symplectic topology of Lagrangian submanifolds in Einstein-Kähler manifolds.* Math. Z. **216** (1994), 471–482.

[39] Y. G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks,* III: Arnold-Givental Conjecture. The Floer Memorial Volume, H. Hofer, C. H. Taubes, A. Weinsitein, E. Zehnder ed., Progress in Mathematics **33** (1995), 555–573, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin.

[40] Y. Ohnita, *Totally real submanifolds with nonnegative sectional curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 474-478.

[41] Y. Ohnita, *Stability of harmonic maps and standard minimal immersions.* Tohoku Math. J. **38** (1986), 259-267.

[42] Y. Ohnita, *Differential geometry of Lagrangian submanifolds and related variational problems*, Proceedings of The Twelfth International Workshop on Differential Geometry and Related Fields, 12 (2008), pp91–114, ed. by Y.-J. Suh, J. D. Pérez, Y.-S. Choi, The Korean Mathematical Society and Research Group in Real and Complex Grassmann Manifolds.

[43] Y. Ohnita, *Geometry of Lagrangian Submanifolds and Isoparametric Hypersurfaces*, Proceedings of The Fourteenth International Workshop on Differential Geometry, 14 (2010), pp43-67, NIMS, KMS and GRG. (OCAMI Preprint Ser. no.10-9.)

[44] Y. Ohnita, *Certain Lagrangian submanifolds in Hermitian symmetric spaces and Hamiltonian stability problems*, Proceedings of The Fifteenth International Workshop on Differential Geometry, 15 (2011), pp209-234, ed. by Y.-J. Suh, National Institute for Mathematical Sciences, The Korean Mathematical Society and Grassmann Research Group. (OCAMI Preprint Ser. no.11-14.)

[45] H. Ono, *Minimal Lagrangian submanifolds in adjoint orbits and upper bounds on the first eigenvalue of the Laplacian*, J. Math. Soc. Japan **55** (2003), 243–254.

[46] H. Ono, *Minimality and Hamiltonian stability of Lagrangian submanifolds in adjoint orbits*, Tokyo J. Math. **26** (2003), 83–106.

[47] H. Ono, *Integral formula of Maslov index and its applications.* Japan J. Math. (N.S.) **30** (2004), 413–421.

[48] H. Ono, *Cyclic Lagrangian submanifolds and Lagrangian fibrations.* Tokyo J. Math. **28**, no. 1, (2005), 63–70.

[49] H. Ozeki and M. Takeuchi, *On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres* I. Tohoku Math. J.(2) **27** (1975), 515–559.

[50] H. Ozeki and M. Takeuchi, *On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres* II. Tohoku Math. J.(2) **28** (1976), 7–55.

[51] B. Palmer, *Hamiltonian minimality of Hamiltonian stability of Gauss maps.* Diff. Geom. and its Appl. **7** (1997), 51–58.

[52] M. Stenzel, *Ricci-flat metrics on the complexfication of a compact rank one symmetric space.* Manuscripta Math. **80** (1993), 151–163.

[53] S. Stolz, *Multiplicities of Dupin hypersurfaces.* Invent. Math. **138** (1999), 253–279.

[54] R. Takagi and T. Takahashi, *On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a unit sphere.* Differential Geometry, in honor of K. Yano, Kinokuniya, Tokyo, (1972), 469–481.

[55] M. Takeuchi, *Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces*, Tohoku Math. J. (2) **36** (1984), 293-314.

[56] G. Thorbergsson, *A survey on isoparametric hypersurfaces hypersurfaces and their generalizations.* in Handbook of Differential Geometry, Vol. I, Editors F. Dillen and L. Verstraelen, Elsevier Science, Amsterdom, 2000, 963–995.

[57] F. Urbano, *Nonnegatively curved totally real submanifolds*, Math. Z. **273** (1986), 345-348.

Osaka City University Advanced Mathematical Institute & Department of Mathematics, Osaka City University, 558-8585, JAPAN

E-mail address: ohnita@sci.osaka-cu.ac.jp